Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Τμήμα Μαθηματικών, Διδάσκων: Ιωάννης Γιαννούλης

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙΙ

6 Φεβρουαρίου 2017

Θέμα 1. **[3]** Έστω $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < 2,\ y = 0\}$ και $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με

$$f(x,y) = 1 \quad \text{για } (x,y) \in M \qquad \text{και} \qquad f(x,y) = 0 \quad \text{για } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus M.$$

(α′) Βρείτε την κλειστή θήκη $\overline{M}$ του M.

(β′) Εξετάστε σε κάθε σημείο $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ την f ως προς τη συνέχεια, μερική διαφορισιμότητα, διαφορισιμότητα, συνεχή διαφορισιμότητα, διαφορισιμότητα κατά κατεύθυνση ως προς όλες τις κατευθύνσεις και δώστε, όπου και όποιες υπάρχουν, τις μερικές παραγώγους, την κλίση, την παράγωγο και τις παραγώγους κατά κατεύθυνση.

Θέμα 2. **[1.5]** Βρείτε και χαρακτηρίστε τα τοπικά ακρότατα της $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x,y) = x^2y^3$.

Θέμα 3. **[1]** Έστω $\bar{x}_\nu = (x_\nu^{(1)}, \ldots, x_\nu^{(n)}) \in \mathbb{R}^n$ για $\nu \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Δείξτε ότι

$$\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0 \quad \text{για } \nu \to \infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall\, i = 1, \ldots n: \quad x_\nu^{(i)} \to x_0^{(i)} \quad \text{για } \nu \to \infty.$$

Θέμα 4. **[1.5]**

(α′) Δώστε το μέγιστο δυνατό πεδίο ορισμού $U \subset \mathbb{R}^2$ της συνάρτησης $f : U \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$$

και εξετάστε αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

(β′) Έστω $\bar{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ και $\bar{g} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ συνεχείς. Δείξτε ότι $\bar{g} \circ \bar{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ συνεχής.

Θέμα 5. **[1]** Έστω $U, V \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτά, $\bar{f} : U \to V$ $1-1$ και επί και $\bar{f}, \bar{f}^{-1}$ συνεχώς διαφορίσιμες. Δείξτε ότι $\det D\bar{f}(\bar{x}) \neq 0$ για κάθε $\bar{x} \in U$.

Θέμα 6. **[2]** Έστω S η μοναδιαία σφαίρα κέντρου $(0,0,0)$ στον $\mathbb{R}^3$.

(α′) Δείξτε ότι η S είναι συμπαγής.

(β′) Βρείτε τα τοπικά και ολικά ακρότατα της συνάρτησης $f : S \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = e^{-z^2}$.

Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας! ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!